

DISEÑO DE UN CONTROLADOR PROPIO A PARTIR DE UN CONTROLADOR IMPROPIO UTILIZANDO TRANSFORMACIONES BILINEALES.

RUBÉN GARRIDO*, GUILLERMO FERNÁNDEZ**, RUBÉN VELÁZQUEZ*.

*Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN Departamento de Control Automático.

Av. Instituto Politécnico Nacional #2508, CP. 07360, México DF.

garrido@ctrl.cinvestav.mx, rvelazquez@ctrl.cinvestav.mx

**Universidad Iberoamericana Departamento de Ciencias.

Av. Prolongación Paseo de la Reforma 880, Lomas de Santa Fe, CP. 01210, México DF.

guillermo.fernandez@uia.com

Resumen: En este artículo se estudia la aplicación de transformaciones bilineales a controladores impropios en sistemas una entrada-una salida con el fin de diseñar un controlador propio equivalente que preserve la estabilidad obtenida con el controlador impropio.

Palabras clave: Estabilidad, transformación bilineal, controlador impropio, filtro.

1. INTRODUCCIÓN.

La herramienta utilizada en este trabajo es la denominada *transformación bilineal* [1] o transformación fraccional lineal definida como:

$$\alpha(s) = \frac{as+b}{cs+d} \quad (1)$$

Donde $ad - bc \neq 0$; $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Algunas de las aplicaciones de las transformaciones bilineales son: el análisis de variable compleja para hacer un mapeo uno-a-uno de un disco a un semiplano [3]; para el diseño de filtros digitales empleados en procesamiento de señales [5]; para resolver el problema de preservación de estabilidad robusta para plantas con incertidumbres multiplicativas [2]; en instrumentación virtual utilizando transformaciones bilineales para la identificación de parámetros de dispositivos de alta impedancia [6].

La técnica empleada consiste en la sustitución dentro de un polinomio dado de la variable compleja s por la transformación (1). La transformación bilineal de particular interés en este trabajo es considerada con los parámetros $b = 0$, $c = 1$ y $d = a > 0$, es decir:

$$\alpha(s) = \frac{as}{s+a} \quad (2)$$

El objetivo de este artículo es el siguiente. Dado el controlador impropio $C(s)$ que estabiliza un sistema de control en lazo cerrado, hallar un controlador propio equivalente mediante el empleo de la transformación bilineal definida en (2) tal que se preserve la estabilidad obtenida con el controlador impropio.

El artículo está distribuido de la siguiente forma: En la parte preliminar se muestran los fundamentos para el diseño de un controlador impropio y un resultado de estabilidad citado en las referencias bibliográficas. Posteriormente, se plantea el problema de diseñar un controlador propio que preserve estabilidad a partir de un controlador impropio empleando la sustitución de la transformación bilineal ya mencionada. En la parte de resultados se da la solución y la prueba del problema planteado. Finalmente se proporcionan las conclusiones de este trabajo.

2. PRELIMINARES.

Considérese una planta representada en el dominio de la frecuencia mediante la función de transferencia:

$$P(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (3)$$

$$\text{Con } \begin{cases} \bullet & B(s) \text{ Hurwitz} & \bullet & n > m \\ \bullet & \deg[A(s)] = n & \bullet & r = n-m \\ \bullet & \deg[B(s)] = m \end{cases}$$

Sea $C(s) = K_c P_{r-1}(s)$ el controlador impropio conectado a la planta $P(s)$ en retroalimentación negativa (ver Figura 1), donde $P_{r-1}(s)$ es un polinomio mónico Hurwitz de grado $r-1$ y K_c es la ganancia del controlador.

Como consecuencia directa de las reglas elementales del lugar geométrico de las raíces [7], se tienen los siguientes lemas:

Lema 1. [2]

Existen Constantes $K_c^{\min}$, $K_c^{\max} > 0$ tales que para todo $K_c^{\min} < K < K_c^{\max}$, el controlador impropio $C(s) = K_c P_{r-1}(s)$ estabiliza la planta $P(s)$. $\square$

Por otro lado, se tiene el siguiente resultado de estabilidad polinomial:

Lema 2. [4]

Sean los polinomios $h_1(s)$ y $h_2(s)$ tales que: $\deg[h_1(s)] < \deg[h_2(s)]$ y $h_1(s) + h_2(s)$ es un polinomio Hurwitz. Entonces, para cualquier entero $j > 0$, la expresión $h_1(s) + h_2(s)(\varepsilon s + 1)^j$ también es Hurwitz para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. $\square$

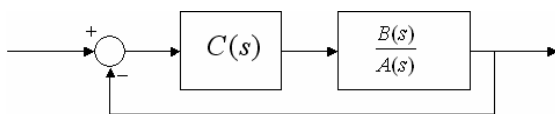


Figura 1. Diagrama a bloques de un sistema de control en lazo cerrado con $C(s)$ controlador impropio.

Dado el sistema de la Figura 1 considérense las siguientes hipótesis:

- $B(s)$ y $C(s)$ son Hurwitz.
- $A(s)$ es un polinomio mónico
- $\deg[A(s)] = n$
- $\deg[B(s)] = m$
- $n > m$
- $\deg[C(s)] = r - 1$
- $r = n - m$

$C(s)$ es un controlador impropio de la forma:

$$C(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \dots + c_{r-1} s^{r-1} \quad (4)$$

La función de transferencia del sistema de control en lazo cerrado de la Figura 1 es:

$$G(s) = \frac{C(s)B(s)}{A(s) + B(s)C(s)} \quad (5)$$

De acuerdo al *Lema 1* se sabe que existen valores de ganancia K_c para los cuales el controlador $C(s)$ estabiliza $G(s)$; es decir: $A(s) + B(s)C(s)$ es Hurwitz.

Sin embargo, aplicar el controlador $C(s)$ necesitaría de la disponibilidad de las derivadas respecto al tiempo de la señal de error o bien, sería necesario algún procedimiento de derivación numérica aplicado a la señal de error el cual, si no es realizado adecuadamente, conllevaría a la amplificación de ruido de medición de alta frecuencia. Por otro lado, el trabajo desarrollado en [2] muestra un método algebraico para obtener un controlador propio dado un controlador impropio diseñado para un sistema de control. Este método consiste en dividir algebraicamente el controlador impropio $C(s)$ entre un polinomio $(\varepsilon s + 1)^{r-1}$, resultando el cociente de grado relativo cero siguiente:

$$\frac{C(s)}{(\varepsilon s + 1)^{r-1}} \quad (6)$$

Este trabajo pretende obtener un resultado semejante aplicando la transformación bilineal mencionada en la ecuación (2). Por conveniencia, la ecuación (2) se describe como:

$$\alpha(s) = \frac{s}{\varepsilon s + 1} \quad (7)$$

donde: $\varepsilon = \frac{1}{a}$ ($\varepsilon > 0$)

Aplicando $\alpha(s)$ a $C(s)$, i.e. $C(\alpha(s))$ se obtiene el controlador:

$$C(\alpha(s)) = \frac{\hat{C}(s)}{(\varepsilon s + 1)^{r-1}} \quad (8)$$

Donde:

$$\hat{C}(s) = c_0(\varepsilon s + 1)^{r-1} + \dots + c_{r-2}s^{r-2}(\varepsilon s + 1) + c_{r-1}s^{r-1} \quad (9)$$

Una ventaja de (8) sobre (6) es el hecho de que el método propuesto exige menor complejidad de cómputo. Sustituyendo (8) en (5) se obtiene el nuevo sistema con controlador $\tilde{G}(s)$:

$$\tilde{G}(s) = \frac{\hat{C}(s)B(s)}{A(s)(\varepsilon s + 1)^{r-1} + B(s)\hat{C}(s)} \quad (10)$$

A partir de (8) y (10), el análisis se puede dividir en 2 partes: 1) mostrar que $\hat{C}(s)$ es Hurwitz y 2) que se preserva la estabilidad obtenida originalmente con $C(s)$ y por lo tanto $\tilde{G}(s)$ es estable.

3. RESULTADOS.

3.1. Proposición 1.

El polinomio $C(s)$ definido en (9) es Hurwitz para valores de ε pequeños, ($\varepsilon > 0$).

Prueba.

De (9) se tiene que:

$$\hat{C}(s) = c_0(\varepsilon\phi_{r-1}(s, \varepsilon) + 1) + c_1s(\varepsilon\phi_{r-2}(s, \varepsilon) + 1) + \dots + c_{r-2}s^{r-2}(\varepsilon\phi_1(s, \varepsilon) + 1) + c_{r-1}s^{r-1} \quad (11)$$

Donde:

$$\varepsilon\phi_i(s, \varepsilon) = ((\varepsilon s + 1)^i - 1) \quad (12) \\ (i = 1, 2, \dots, r-1)$$

Desarrollando (11) y reagrupando términos se llega a:

$$\hat{C}(s) = c_0 + c_1s + \dots + c_{r-2}s^{r-2} + c_{r-1}s^{r-1} + c_0\varepsilon\phi_{r-1}(s, \varepsilon) + c_1s\varepsilon\phi_{r-2}(s, \varepsilon) + \dots + c_{r-2}s^{r-2}\varepsilon\phi_1(s, \varepsilon) \quad (13)$$

Nótese que la primera parte de la expresión (13) corresponde a $C(s)$ definido en (4), mientras que el resto de (13), debido a que siempre es posible factorizar ε de los $\phi_i(s, \varepsilon)$, puede definirse de la siguiente forma:

$$\varepsilon\Psi(s, \varepsilon) = \sum_{\substack{j=0,1,\dots,r-2 \\ i=r-1,r-2,\dots,1}} c_j\phi_i(s, \varepsilon) \quad (14)$$

Por lo que (13) se describe como:

$$\hat{C}(s) = C(s) + \varepsilon\Psi(s, \varepsilon) \quad (15)$$

Debido a los resultados del lugar geométrico de las raíces [7] (15) es estable dado que existe un $H(s)$ tal que para ε suficientemente pequeño las raíces de $\hat{C}(s)$ se encuentran en una vecindad cercana a las raíces de $C(s)$ que es Hurwitz. Es decir, $\exists H(s) t.q.:$

$$H(s) = 1 + \varepsilon \frac{\Psi(s, \varepsilon)}{C(s)} \quad (16)$$

Por lo tanto siempre existe un $\varepsilon > 0$ para el cual $\hat{C}(s)$ es estable $\square$

3.2. Proposición 2.

Si el polinomio $A(s) + B(s)\hat{C}(s)$ es Hurwitz, entonces $A(s)(\varepsilon s + 1)^{r-1} + B(s)\hat{C}(s)$ es Hurwitz.

Prueba.

Nótese que el polinomio característico de $\tilde{G}(s)$ es semejante al polinomio presentado en el Lema 2 en donde $h_1(s) = B(s)\hat{C}(s)$, $h_2(s) = A(s)$ y $j = r-1$.

Entonces, utilizando el Lema 2 si se cumple que: (A) $\deg[B(s)\hat{C}(s)] < \deg[A(s)]$ y (B) $A(s) + B(s)\hat{C}(s)$ es Hurwitz, entonces para cualquier entero $r-1 > 0$ el polinomio $A(s)(\varepsilon s + 1)^{r-1} + B(s)\hat{C}(s)$ es Hurwitz

(A):

$$\deg[B(s)\hat{C}(s)] = m + r - 1 = m + n - m - 1 = n - 1$$

$$\Rightarrow \deg[B(s)\hat{C}(s)] = n - 1 < n = \deg[A(s)] \quad (17)$$

(B):

Sustituyendo la ecuación (15) en $A(s) + B(s)\hat{C}(s)$, se tiene:

$$A(s) + C(s)B(s) + \varepsilon\Psi(s, \varepsilon)B(s) \quad (18)$$

Nuevamente, utilizando el análisis del lugar geométrico de las raíces $\exists F(s)$ tal que para ε suficientemente pequeño las raíces de (18) se encuentran en una vecindad cercana a las raíces de $A(s) + B(s)C(s)$ que es Hurwitz. Por lo que:

$$F(s) = 1 + \varepsilon \frac{\Psi(s, \varepsilon) B(s)}{A(s) + C(s) B(s)} \quad (19)$$

Más aún, si ε^* es tal que $F(s)$ es inestable, entonces siempre existe un $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, tal que $F(s) = A(s) + B(s)\hat{C}(s)$ es estable.

Finalmente, utilizando lema 2 se concluye que $A(s)(\varepsilon s + 1)^{r-1} + B(s)\hat{C}(s)$ es Hurwitz. $\square$

4. EJEMPLO.

Diseño de un controlador propio a partir de un controlador impropio utilizando transformaciones bilineales para el siguiente sistema:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s^2} \quad (20)$$

$$\text{Con } \begin{cases} \bullet & B(s) = 1 & \bullet & n > m \\ \bullet & \deg[A(s)] = n = 2 & \bullet & r = n - m \\ \bullet & \deg[B(s)] = m = 0 & \bullet & r - 1 = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto $\deg[C(s)] = 1$, es decir:

$$C(s) = c_0 + c_1 s \quad (21)$$

El sistema en lazo cerrado de la figura 1 es entonces:

$$G(s) = \frac{c_0 + c_1 s}{s^2 + c_0 + c_1 s} \quad (22)$$

Aplicando la transformación bilineal al controlador $C(s)$ se obtiene:

$$C(\alpha(s)) = \frac{c_0(\varepsilon s + 1) + c_1 s}{(\varepsilon s + 1)} = \frac{\hat{C}(s)}{(\varepsilon s + 1)} \quad (23)$$

Y el sistema en lazo cerrado con el controlador propio $\hat{C}(s)$ es:

$$\tilde{G}(s) = \frac{(\varepsilon c_0 + c_1)s + c_0}{\varepsilon s^3 + s^2 + (\varepsilon c_0 + c_1)s + c_0} \quad (24)$$

De acuerdo con las proposiciones 1 y 2, el sistema representado por la ecuación anterior es estable.

Para ratificar estos resultados, se muestran las siguientes gráficas obtenidas con el programa MATLAB SIMULINK.

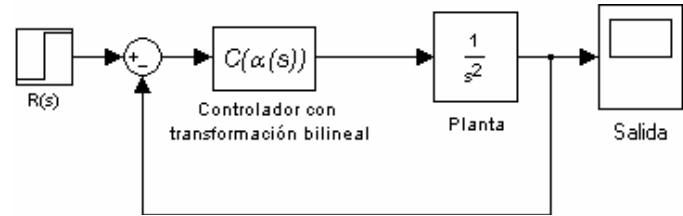


Figura 2. Diagrama de bloques del ejemplo.

Para $c_0 = 1$, $c_1 = 20$ y $\varepsilon = 0.01$ la respuesta al escalón unitario es:

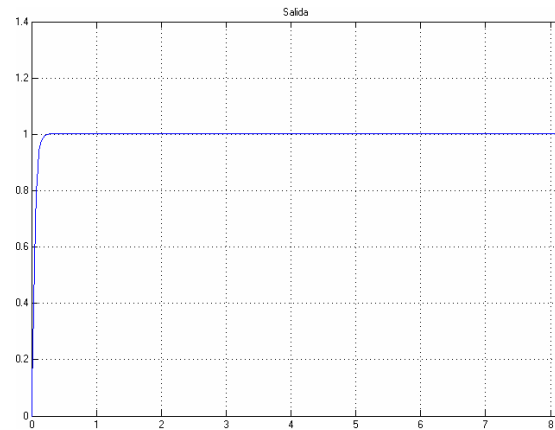
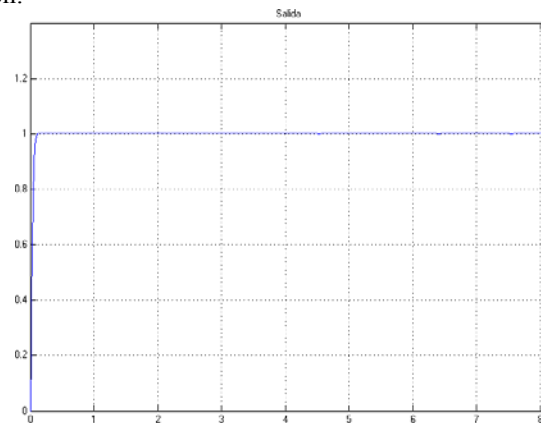


Figura 3. Gráfica de la respuesta al escalón unitario del ejemplo.

Para mostrar que esta técnica proporciona además estabilidad robusta, supóngase que el parámetro $B(s) = 1$ está perturbado, es decir: $B(s) = 1 \pm \delta$. Por ejemplo para $\delta = \pm 0.5$ las respuestas correspondientes son:



(a)

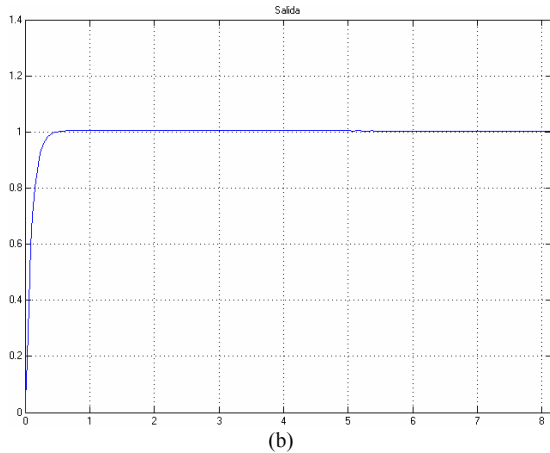


Figura 4. Gráficas del ejemplo con $B(s) = 1.5$ y $B(s) = 0.5$ respectivamente (a) y (b).

El controlador descrito en (23) puede describirse como:

$$c_0 + \frac{c_1 s}{\varepsilon s + 1} \quad (25)$$

El cual corresponde a un controlador proporcional derivativo con ganancia proporcional c_0 y ganancia derivativa c_1 .

Es interesante resaltar que la técnica expuesta en este trabajo corresponde a la práctica común de aproximar un derivador ideal mediante una red lineal pasa altos. Esto puede corroborarse en la ecuación (25) en donde la

función de transferencia $\frac{c_1 s}{\varepsilon s + 1}$ aproxima en bajas

frecuencias a la de un derivador s en un rango definido por la frecuencia de corte del filtro $1/\varepsilon$. Una interpretación similar es posible para las derivadas de orden superior del error respecto al tiempo. De lo anterior se desprende que los resultados mostrados en este trabajo dan un soporte teórico a la utilización práctica de las redes pasa altos como estimadores de derivadas temporales.

5. CONCLUSIONES.

En el presente trabajo se mostró que dado un sistema de control en lazo cerrado con un controlador impropio, es posible establecer un controlador propio equivalente mediante el uso de transformaciones bilineales. Dicho controlador preserva la estabilidad obtenida con el controlador impropio.

Las pruebas de los resultados obtenidos en las proposiciones se basaron principalmente en argumentos del análisis del lugar geométrico de las raíces.

El enfoque propuesto permite realizar controladores que requieran derivadas de orden superior de la salida de la planta. En este sentido el enfoque propuesto está emparentado con los observadores de alta ganancia, relación que será tema de investigación ulterior. Cabe mencionar que hasta donde los autores conocen, esta es la primera vez que se emplean transformaciones bilineales para la síntesis de controladores.

Como trabajo futuro se pretende establecer la relación entre el enfoque presentado y los observadores de alta ganancia así como la modificación del controlador propuesto para incorporar acción integral.

BIBLIOGRAFÍA.

- [1] Fernández-Anaya G., (1999) *Preservation of SPR functions and stabilization by substitutions in SISO plants*. IEEE Trans. Automatic Control **44**, pp. 2161-2164.
- [2] Fernández-Anaya G. and Álvarez-Ramírez J., (2003) *Preservation of robust stability under several uncertainties*. Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones **30**, 41-54.
- [3] Polya, George y Latta, Gordon. *Variable Compleja*. 1976. Editorial Noriega Limusa.
- [4] Lee Tong-Heng, Wang Qing-Guo and He Jian-Bo (1997) *Low-order Stabilizers for Linear Systems*. Automática Vol. 33, No. 44, pp. 651-654.
- [5] McKelvey, Tomas (2003) *Digital IIR filter design with analog prototypes and bilinear transformation*, Department of signals and systems, Chalmers University of technology Göteborg, Sweden.
- [6] Hoja, Jerzy and Lentka, Grzegorz (2003) *Virtual instrument using bilinear transformation for parameter identification of high impedance objects*, Institute of Physics Publishing, Measurement Science and Technology **14** pp. 633-642.
- [7] Ogata, K. (1998) *Ingeniería de Control Moderna*, Prentice Hall, Capítulo 6, pp. 317-403.